

Name: _____

02.05.2016

Exponent und Logarithmus

Sie haben bislang nur Grundrechenarten kennen gelernt und eine höhere Rechenart, die des Quadrierens und Radizierens („Wurzel ziehen“).

Die Potenzgesetze sind schnell wiederholt:

Beispiel:

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

$$2^2 \times 2^3 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 2^{2+3} = 32$$

$$(2^3)^2 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6 = 64$$

$$\text{also: } (2^3)^2 = 2^{2 \times 3}$$

$$\frac{2^5}{2^2} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2} = 2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$$

$$\text{also: } \frac{2^5}{2^2} = 2^{5-2} = 2^3$$

allgemein:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_n \text{ Faktoren}$$

$$a^n \times a^m = a^{n+m} = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n+m \text{ Faktoren}}$$

$$(a^n)^m = a^{n \times m} = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \times m \text{ Faktoren}}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n-m \text{ Faktoren}}$$

Beachten Sie bitte, dass die Basis immer gleich ist! Somit werden bei den Potenzgesetzen die Rechenarten um eine Stufe zurückgesetzt.

Multiplikation → Addition Division → Subtraktion Potenzieren → Multiplizieren

Überlegen Sie sich selbst, wie das Wurzelziehen jetzt aussehen muss! Lassen Sie sich von folgender Idee leiten:

$$x^2 = x \times x$$

$$\sqrt{x^2} = x$$

Verallgemeinern Sie dies auf eine beliebige Wurzel:

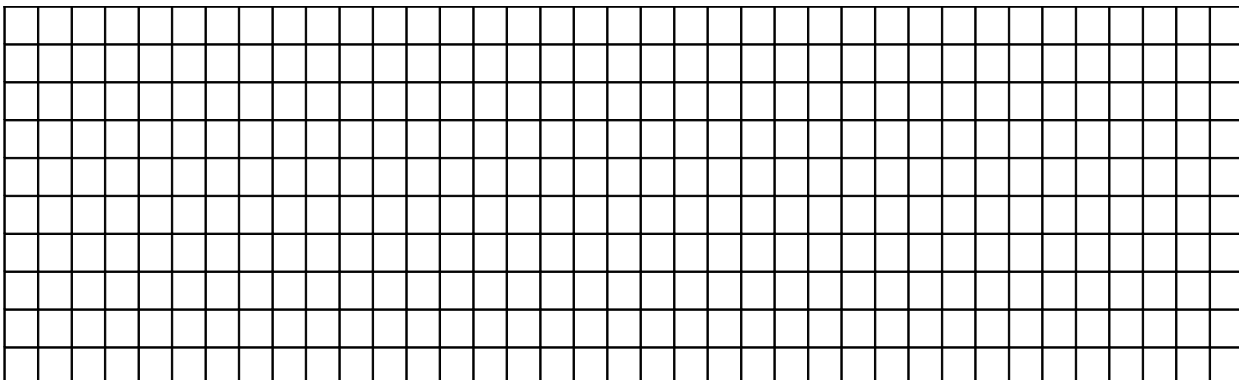
$$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$$

$$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$$

also:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_n \text{ Faktoren}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$



Name: _____

Und jetzt zum Logarithmus:

für 4^3 kann man auch schreiben: $\exp(3 \cdot \ln(4))$ oder: $e^{3 \cdot \ln(4)}$

Probieren Sie das an einigen Beispielen mit Ihrem Taschenrechner aus.

Der Logarithmus von e ist 1, also: $\ln(e)=1$

Probieren Sie auch das mit Ihrem Taschenrechner aus. $\ln(e^1)$

Dabei bedeutet e die eulersche Zahl und ln ist der *lorithmus naturalis* (natürlicher Logarithmus) Logarithmus (griech.: [λόγος](#) = Verständnis, αριθμός = Zahl)

Diese Zahl ist zwar real auf der Zahlenachse zu finden, aber nicht durch eine algebraische Gleichung zu berechnen, also ist sie transzendent – genau wie Pi. Der Zahlen wert ist also nur approximativ anzugeben, also durch einen Näherungswert.

Geben Sie in Ihren Taschenrechner ein: $\exp(1)$, und Sie erhalten als Ergebnis 2,718281...

Somit ist der Logarithmus die Umkehrung der Exponentialrechnung

Für den Logarithmus gilt folgende Funktionalgleichung: $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$.

Hier wird also auch die Multiplikation um eine Rechenstufe zurückgesetzt.

Also kann man mit dem Logarithmus den Exponenten bestimmen, z.B. bei der Zinseszinsgleichung:

$$K_n = K_0(1+P)^n \quad \text{mit } P = p/100$$

Sind also das Startkapital, der Zinssatz sowie das Endkapital gegeben, so kann man die Laufzeit (z.B. bei Krediten) folgendermaßen berechnen:

$$K_n = K_0(1+P)^n \quad \text{teilen durch } K_0$$

$$\frac{K_n}{K_0} = (1+P)^n = e^{n \ln(1+P)} \quad \text{logarithmieren (ln)}$$

$$\ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right) = n \times \ln(1+P) \quad \text{teilen durch } \ln(1+P)$$

$$\frac{\ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\ln(1+P)} = n$$

Testen Sie dies mit Ihrem Taschenrechner an dem Einstiegsbeispiel der heutigen Stunde.

Berechnen Sie auch, wann sich das Kapital verdreifacht, verzehnfacht, ... hat.

Aufgaben:

1. Die Masse einer Melone kann unter idealen Bedingungen täglich um 10% zunehmen. Sie wiegt bei Beginn der Beobachtung 1 Kg. Melonen werden ab 2 ,5 kg geerntet. Bestimmen Sie die Wachstumsfunktion und berechnen Sie , wie viele Tage nach der Beobachtung die Melone geerntet werden kann.
2. Auf einer Seetangfarm werden Algen gezüchtet. Zu Beginn der Beobachtung ist eine Alge 1 m hoch. Die Zuchtiefe beträgt 20 m. Pro Woche verdoppelt sich die Algenlänge.
Wann erreichen sie die Oberfläche?

Name: _____

Wenn die Alge mit 1 cm Länge ausgesetzt wird, dauert es wie lange, bis die Alge 1 m groß ist?